160 - Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

Cadre : Soit $(E, \langle ., . \rangle)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension finie $n \in \mathbb{N}^\star$. On note $\|.\|$ la norme issue du produit scalaire. Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une base orthonormée de E. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.

I Endomorphismes d'un espace euclidien

1) Adjoint d'un endomorphisme

Définition 1. Il existe un unique $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\forall\, x, y \in E,\ \langle u(x), y \rangle = \langle x, v(y) \rangle$$

On l'appelle adjoint de u, noté $u^\star$. On a de plus $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^\star) = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.

Exemple 2.

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+3y \\ 2x+8y \end{pmatrix} \end{array} \right. \Rightarrow \quad f^\star : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+2y \\ 3x+8y \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Proposition 3. *Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :*

(i) $(u^\star)^\star = u$

(ii) $(u+v)^\star = u^\star + v^\star$

(iii) $(\lambda u)^\star = \lambda u^\star$

(iv) $(u \circ v)^\star = v^\star \circ u^\star$

(vi) $\mathrm{Ker}(u^\star) = \mathrm{Im}(u)^\perp$

(vii) $\mathrm{Im}(u^\star) = \mathrm{Ker}(u)^\perp$

(viii) $\mathrm{rg}(u^\star) = \mathrm{rg}(u)$

(ix) $|||u^\star||| = |||u|||$

Proposition 4. *Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie ${}^{\mathrm{t}}MM = 0$, alors $M = 0$.*

Proposition 5. *Si F est un sous-espace vectoriel de E qui est stable par u, alors $F^\perp$ est stable par $u^\star$.*

2) Exemples d'endomorphismes remarquables

Définition 6. On dit que u est orthogonal (ou une isométrie) si $u^\star = u^{-1}$, autrement dit, si u conserve le produit scalaire :

$$\forall\, x, y \in E,\ \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des isométries de E.

Proposition 7. *$v : E \to E$ est orthogonal si, et seulement si, v est linéaire et conserve la norme.*

Exemple 8. *(i) Id_E et $-Id_E$ sont orthogonaux.*

(ii) Les rotations et les symétries orthogonales sont des isométries.

(iii) Les valeurs propres d'une isométrie ne peuvent être que ± 1.

Proposition 9. *u est orthogonal si, et seulement si, ${}^{\mathrm{t}}A = A^{-1}$.*

Définition 10. On dit que u est symétrique (ou auto-adjoint) si $u^\star = u$, autrement dit, si :

$$\forall\, x, y \in E,\ \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$$

On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de E.

Définition 11. On dit que u est anti-symétrique si $u^\star = u$. On note $\mathcal{A}E$ l'ensemble des endomorphismes anti-symétriques de E.

Exemple 12. *(i) $u + u^\star$ est symétrique.*

(ii) Un projecteur orthogonal est symétrique.

Proposition 13. *(i) u est symétrique si, et seulement si, ${}^{\mathrm{t}}A = A$.*

(ii) u est anti-symétrique si, et seulement si, ${}^{\mathrm{t}}A = -A$.

Définition 14. On dit que u est symétrique (ou auto-adjoint) si u et $u^\star$ commutent.

Exemple 15. *Un endomorphisme auto-adjoint, antisymétrique ou orthogonal est normal.*

Proposition 16. *u est normal si, et seulement si, ${}^{\mathrm{t}}AA = A\,{}^{\mathrm{t}}A$.*

Proposition 17. *On a les caractérisations suivantes :*

	u	$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$
symétrique	$u^\star = u$	${}^{\mathrm{t}}A = A$
anti-symétrique	$u^\star = -u$	${}^{\mathrm{t}}A = -A$
orthogonal	$u^\star = u^{-1}$	${}^{\mathrm{t}}A = A^{-1}$
normal	$u^\star u = u u^\star$	${}^{\mathrm{t}}AA = A\,{}^{\mathrm{t}}A$

II Endomorphismes auto-adjoints

1) Premières propriétés

Proposition 18. *$\mathcal{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.*

Définition 19. Soit $u \in \mathcal{S}(E)$, alors :

(i) u est dit positif si $\langle u(x), x\rangle \geqslant 0$ pour tout $x \in E$. On note $\mathcal{S}^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques positifs.

(ii) u est dit défini positif si $\langle u(x), x\rangle > 0$ pour tout $x \in E$. On note $\mathcal{S}^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques défini positifs.

Proposition 20. *Si $u \in \mathcal{S}(E)$, alors $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}$. Si $u \in \mathcal{S}^+(E)$, alors $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}^+$. Si $u \in \mathcal{S}^{++}(E)$, alors $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}^{+\star}$.*

Lemme 21. *Les sous-espaces propres associés à deux valeurs propres distinctes sont orthogonaux.*

Proposition 22. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang p avec $n \geqslant p$. Alors ${}^{\mathrm{t}}AA \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$.*

Application 23 (Moindre carrés)**.** *Soient $n, p \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. On cherche $x \in \mathbb{R}^p$ tel que $\|b - Ax\|_2 = \inf_{y \in \mathbb{R}^p} \|b - Ay\|_2$.*

(i) Il existe toujours une solution au problème.

(ii) $x \in \mathbb{R}^p$ est solution si, et seulement si, ${}^{\mathrm{t}}AAx = {}^{\mathrm{t}}Ab$.

(iii) Si $n \geqslant p$ et $\mathrm{rg}(A) = p$, alors ${}^{\mathrm{t}}AA$ est inversible, et il existe une unique matrice B triangulaire inférieure, à diagonale positive, telle que ${}^{\mathrm{t}}AA = B\,{}^{\mathrm{t}}B$. On a alors $x = (B\,{}^{\mathrm{t}}B)^{-1}\,{}^{\mathrm{t}}Ab$ comme solution.

2) Autour du théorème spectral

Théorème 24 (Théorème spectral)**.** *Tout endomorphisme symétrique est diagonalisable dans une base orthonormée.*

Corollaire 25. *Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^{\mathrm{t}}PAP$ soit diagonale.*

Corollaire 26. *Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Alors $u \in \mathcal{S}^+(E)$ si, et seulement si, $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}^+$ et $u \in \mathcal{S}^{++}(E)$ si, et seulement si, $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}^{+\star}$.*

Application 27. *Pour $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a $|||A|||_2 = \rho(A)$.*

Application 28. *Pour $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, il existe une unique matrice $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.*

Théorème 29. $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ *est un homéomorphisme.*

III Endomorphismes normaux

Dans cette partie, u désigne un endomorphisme normal.

Proposition 30. *On a $\|u(x)\| = \|u^\star(x)\|$ pour tout $x \in E$.*

Application 31. *Les valeurs propres de u sont des complexes de module 1.*

Lemme 32. *Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors F et $F^\perp$ sont stables par u et $u^\star$.*

Lemme 33. *Il existe un sous-espace vectoriel stable par u de dimension au plus 2.*

Lemme 34. *Si $\dim E = 2$, il existe une base orthonormée telle que :*

(i) u est diagonalisable si u a une valeur propre réelle.

(ii) sa matrice est de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ sinon.

Théorème 35. *Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que :*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \tau_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \tau_s \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} n = r + 2s \\ \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R} \\ \tau_k = \begin{pmatrix} a_k & -b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \end{cases}$$

IV Endomorphismes orthogonaux

1) Propriétés et réductions

Proposition 36. *Soit $u \in \mathcal{O}(E)$. Alors :*

(i) $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

(ii) $\det(u) = \pm 1$. *En particulier, u est inversible.*

Proposition 37. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $u \in \mathcal{O}(E)$ si, et seulement si, transforme toute base orthonormée en une base orthonormée.*

Théorème 38. *Soit $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors M est semblable à :*

$$\begin{pmatrix} I_r & & & & 0 \\ & -I_m & & & \\ & & R_{\theta_1} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & R_{\theta_s} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \theta_i \in]0; 2\pi[\setminus \{\pi\} \\ R_{\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix} \end{cases}$$

2) Étude en dimensions 2 et 3

Proposition 39 (Étude en dimension 2)**.** *Soient $u \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$ et A sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.*

(i) Si $u \in \mathcal{O}^+(\mathbb{R}^2)$, alors il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. u est alors la rotation d'angle θ centrée en l'origine.

(ii) Si $u \notin \mathcal{O}^+(\mathbb{R}^2)$, alors il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$. u est alors la symétrie par rapport à la droite d'angle polaire $\frac{\theta}{2}$.

Proposition 40 (Étude en dimension 3)**.** *Soient $u \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$. Il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est :*

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

pour un $\theta \in [0, 2\pi[$ et où $\varepsilon = \pm 1$. De plus :

(i) Si $u \in \mathcal{O}^+(\mathbb{R}^2)$, alors $\varepsilon = 1$. u est alors une rotation d'angle θ autour d'une droite.

(ii) Si $u \notin \mathcal{O}^+(\mathbb{R}^2)$, alors $\varepsilon = -1$. u est alors la composée d'une rotation d'angle θ autour d'une droite D puis d'une symétrie orthogonale par rapport à $D^\perp$.

3) Topologie du groupe orthogonal

Proposition 41. *$\mathcal{O}(E)$ est une partie compacte de $\mathcal{L}(E)$.*

Proposition 42. *Les composantes connexes de $\mathcal{O}(E)$ sont les fermés $\mathcal{O}^+(\mathbb{R}^2)$ et $\mathcal{O}^-(\mathbb{R}^2)$*

Théorème 43 (Décomposition polaire)**.** *On a les homéomorphismes :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \\ (O, S) & \longmapsto & OS \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{U}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \\ (U, H) & \longmapsto & UH \end{array}$$

Corollaire 44. *Pour $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, on a $|||A|||_2 = \sqrt{\rho({}^t\!AA)}$*

Corollaire 45. *Tout sous-groupe compact de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ qui contient le groupe orthogonal $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est le groupe $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ lui-même.*

Développements

- Un homéomorphisme induit par l'exponentielle (29) [CG13]
- Réduction des endomorphismes normaux (32,34,35) [Gou94]
- Décomposition polaire (43) [CG13]

Références

[Rom20] J.-E. Rombaldi. *Algèbre et Géométrie.* DeBoeck
[Gou94] X. Gourdon. *Les Maths en Tête : Algèbre.* Ellipses, 2e édition
[CG13] P. Caldero et J. Germoni. *Histoires Hédonistes de Groupes et de Géométries 1.* Calvage et Mounet